Aufgaben zur Mikroökonomik I

Aufgabe 1

Der Vermieter möchte seine großen Wohnung in herrlichster zentraler Wohnlage der Studentenstadt G an eine WG vermieten. Per Aushang werden Mieter für die 4 gleich großen Zimmer gesucht, die sich mit ihren Mietvorstellungen melden sollen. Nach einer Zeit laufen beim Vermieter die Anfragen folgender Interessenten ein:

Name	Vorbehaltspreis
Max	410,-
Minnie	280,-
Georg	410,-
August	220,-
Susi	245,-
Strolch	230,-
Benjamin	430,-
Bibi	280,-

(a) Zeichnen Sie Angebots- und Nachfragekurve. Welcher Mietpreis wird erzielt, wenn der Vermieter, wissend, dass sich Preisunterschiede innerhalb einer WG nicht verheimlichen lassen, von allen die gleiche Miethöhe verlangen will?

(b) Alternativ überlegt sich der Vermieter, lediglich 2 Zimmer zu vermieten, um einen höheren Mietpreis durchzusetzen. Lohnt sich diese Überlegung, wenn er weiterhin von allen den gleichen Preis verlangt?

(c) In letzter Minute flattert noch die Nachfrage von Falko ins Haus, der für ein Zimmer bis zu 350,- zu zahlen bereit ist. Welche Konsequenzen hat diese Bewerbung für die Überlegungen des Vermieters?

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie für den 2-Güter-Fall die Gleichung der Budgetgeraden $p_1x_1+p_2x_2 = m$ als Funktion $x_2 = x_2(x_1)$ und als Funktion $x_1 = x_1(x_2)$.

(b) Interpretieren Sie die Achsenabschnitte der Budgetgeraden.

(c) Wie ändert sich die Lage der Budgetgerade, wenn sich p_1, p_2 bzw. m ändern?

Aufgabe 3

Versuchen Sie, eine Nutzenfunktion mit 2 Gütern graphisch darzustellen.

Aufgabe 4

Die Aussagen (a) bis (c) beschreiben Präferenzordnungen von verschiedenen Haushalten. Unterstellen Sie, dass die Aussagen für alle $(x_1+x_2) \gg 0$ gelten und dass Präferenzordnungen transitiv, vollständig, und reflexiv sind.
Bestimmen Sie das jeweils zugehörige Indifferenzkurvensystem und fertigen Sie Skizzen an.

(a) Für alle $\delta > 0$ und $\epsilon > 0$ gilt:
$(x_1 + \delta, x_2) \succ (x_1, x_2) \sim (x_1 + \epsilon, x_2 - \epsilon)$.

(b) Für alle $\delta > 0$ und $\epsilon > 0$ gilt:
$(x_1 + \delta, x_2) \succ (x_1, x_2 + \epsilon) \sim (x_1, x_2) \sim (x_1, x_2 - \epsilon)$.

(c) Für alle $\delta > 0$ und $\epsilon > 0$ gilt:
$(x_1 + \delta, x_2 + \epsilon) \succ (x_1, x_2) \sim (x_1 + \delta, x_2) \sim (x_1, x_2 + \epsilon)$.

Aufgabe 5

Erläutern Sie mathematisch, graphisch und verbal den Begriff der Grenzrate der Substitution.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen nach x und stellen Sie diese graphisch dar:

(a) $f(x) = 2x^2 + 3$

(b) $f(x) = \sqrt{4x + 3}$

(c) $f(x) = \frac{x^2+3}{2x}$

(d) $f(x) = 2 \ln x + 4x$

Aufgabe 7

Bilden Sie das totale Differential folgender Gleichungen:

(a) $z = 2xy^2 + 3x + y$

(b) $z = ln(x^2 - y^2)$

(c) $z = \sqrt{xy} + x^2$

Aufgabe 8

Bestimmen Sie das Maximum folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{8}{3x^2+4}$

(b) $f(x) = 5(x+2)^4 - 3$

Aufgabe 9

(a) Berechnen Sie für die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot \sqrt{x_2}$ die Funktion der Indifferenzkurve durch den Konsumpunkt $x_1 = 2, x_2 = 4$ und die Grenzrate der Substitution in diesem Punkt.

(b) Begründen Sie, warum Indifferenzkurven negative Steigung haben und sich nicht schneiden.

Aufgabe 10

Stellen Sie graphisch eine Nutzenmaximierung eines Haushaltes unter Berücksichtigung eines Budgets dar. Bestimmen Sie Bedingungen der Optimierung. Welche Probleme können auftreten?

Aufgabe 11

Ein Haushalt mit der Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^2$ fragt bei den Preisen $p_1 = 5$ und $p_2 = 6$ die Mengen $x_1 = 10$ und $x_2 = 20$ nach. Wie kann man, ohne selbst den optimalen Verbrauchsplan zu berechnen, entscheiden, ob der gewählte Punkt optimal ist?

Aufgabe 12

Ausgehend von einer Budgetsituation (p_1, p_2, m) mit positivem Einkommen wird p_1 verdoppelt, p_2 vervierfacht und m verdreifacht. Wird die Budgetmenge größer, kleiner oder ändert sie sich nicht? Kann überhaupt eine Aussage darüber getroffen werden?

Aufgabe 13

Ein Haushalt hat die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{3}} \cdot x_2^{\frac{1}{3}}$, sein Budget beträgt $m = 18$, die Güterpreise sind gegeben durch $p_1 = 0.75$ und $p_2 = 3$.

(a) Berechnen Sie die optimalen Verbrauchsmengen x_1 und x_2 und das maximal erreichbare Nutzenniveau.

(b) Um wieviel steigt der Nutzen, wenn sich das Budget um eine (marginale) Einheit erhöht?

(c) Berechnen Sie den Anteil der Ausgaben für das Gut 1 an den Gesamtausgaben. Wie verändert sich dieser Anteil, wenn der Preis des Gutes 2 sinkt?

Aufgabe 14

Gegeben ist folgende Nutzenfunktion: $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 \cdot x_2} + 5$.

(a) Berechnen Sie die Marschallschen Nachfragefunktionen und mit ihnen die indirekte Nutzenfunktion $v(p_1, p_2, m)$ her. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von Roys Identität.

(b) Die Preise sind gegeben durch $p_1 = 1$ und $p_2 = 9$, zur Verfügung steht ein Budget in Höhe von $m = 180$. Welchen Nutzen kann der Haushalt maximal erreichen?

(c) Leiten Sie nun zu dem in (b) errechneten Nutzenniveau die Hicksschen Nachfragekurven und die Ausgabenfunktion her.

(d) Verdeutlichen Sie auch graphisch die unterschiedlichen Optimierungsansätze der Nutzenmaximierung bzw. Ausgabenminimierung.

Aufgabe 15

Berechnen Sie für die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = (x_1 + 15)(x_2 + 30)$ und den Preisen $p_1 = p_2 = 1$ die Nachfragefunktionen in Abhängigkeit vom Einkommen. Was ist bei der Lösung zu beachten?

Aufgabe 16

Gegeben seien folgende Nutzenfunktionen:

(a) $u(x_1, x_2) = 8x_1 + 12x_2$

(b) $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

(c) $u(x_1, x_2) = 3x_2 + 4lnx_1$

(d) $u(x_1, x_2) = (x_1 + 2) \cdot (x_2 + 3)$

(e) $u(x_1, x_2) = (x_1)^a + (x_2)^b$

Ermitteln Sie bitte die Grenznutzen der Güter x_1 und x_2, sowie die MRS an der Stelle (x_1, x_2). Erläutern Sie die Eigenschaften der Nutzenfunktion b).

Aufgabe 17

Erwin besucht das Oktoberfest und konsumiert Bier (x_1) und Pizza (x_2). Seine Präferenzen werden durch folgende Nutzenfunktion dargestellt: $u(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2$. Der Preis einer Maß Bier liegt bei 7, eine Pizza kostet 12. Erwins Budget liegt bei 168 wöchentlich.

(a) Welche Mengen der Güter x_1 und x_2 konsumiert Erwin, wenn er seinen Nutzen maximiert?

(b) Da Bayern nun seine Unabhängigkeit erklärt und Importzölle auf Pizza erhebt, steigt deren Preis auf 28. Was konsumiert Erwin jetzt?

Aufgabe 18, Klausur SS 04

Gegeben ist ein Haushalt mit der Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = 3 \cdot \sqrt{x_1 \cdot x_2}$. Die Preise der Güter betragen $p_1 = 1$ und $p_2 = \frac{1}{4}$, dem Haushalt steht ein Budget in Höhe von $m = 4$ zur Verfügung. Berechnen Sie

a) den Betrag der Grenzrate der Substitution $\mid MRS \mid = \mid \frac{dx_2}{dx_1} \mid$ im Nutzenmaximum.

b) den maximal erzielbaren Nutzen.

c) den Grenznutzen des Gutes 2 im Nutzenmaximum.

d) den Grenznutzen der letzten Geldeinheit im Nutzenmaximum.

Aufgabe 19, Klausur SoSe 05

		Wahr	Falsch
a)	Eine Indifferenzkurve ist der geometrische Ort aller Güterbündel, die gleichen Nutzen stiften.	☐	☐
b)	Liegt einer Nutzenfunktion eine streng konvexe Präferenzordnung zugrunde, können die abgeleiteten Indifferenzkurven nie linear sein.	☐	☐
c)	Der Betrag der Grenzrate der Substitution $\|MRS\| = \|\frac{dx_2}{dx_1}\|$ bei vollkommen komplementären Gütern ist 1.	☐	☐
d)	Die Indifferenzkurven, die zu der Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$ gehören, sind linear.	☐	☐

Aufgabe 20, Klausur SoSe 04

Gegeben ist die quasilineare Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$. Zu den gegebenen Preisen $p_1 = p_2 = 2$ und dem Einkommen m werden im Optimum die Gütermengen $x_1^* > 0$ und $x_2^* > 0$ nachgefragt.

	Wahr	Falsch
a) Der Betrag der Grenzrate der Substitution $\mid MRS \mid = \mid \frac{dx_2}{dx_1} \mid$ ist $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_1}}$.	☐	☐
b) Der Grenznutzen des Gutes 2 beträgt p_2.	☐	☐
c) Entlang der Einkommens-Konsum-Kurve ändert sich im Bereich $x_1^* > 0, x_2^* > 0$ die Grenzrate der Substitution nicht.	☐	☐
d) Wenn das Einkommen steigt, steigt im Optimum auch die Menge x_1^*.	☐	☐
e) Wenn das Einkommen unter eine bestimmte Grenze sinkt, dann fragt der Haushalt trotz positiven Einkommens das Gut x_2 im Optimum nicht nach.	☐	☐

Aufgabe 21

Gegeben ist folgende Nutzenfunktion: $u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + x_2$.

(a) Leiten Sie zunächst die Marschallschen Nachfragefunktionen nach x_1 und x_2 her sowie die Einkommens-Konsum-Kurve und die Engelkurven.

(b) Berechnen Sie die Einkommenselastizitäten der Nachfrage nach beiden Gütern. Begründen Sie die Ergebnisse auch mit Hilfe des Grenznutzens beider Güter.

(c) Berechnen Sie die direkte Preiselastizität der Nachfrage nach x_1 sowie die Kreuzpreiselastizität der Nachfrage nach x_1 und erläutern Sie auch hier das Resultat.

Aufgabe 22

Ein Haushalt hat die Nutzenfunktion $u(x_1, x_2) = (x_1 + 10)x_2$ und ein Budget in Höhe von $m = 90$. Der Preis des Gutes 1 steigt von $p_1 = 1$ auf $p_1 = 4$, während der Preis des zweiten Gutes stabil bei $p_2 = 1$ verbleibt.

(a) Berechnen Sie den Einkommens-und den Substitutionseffekt (nach Hicks) für beide Güter!

(b) Wie setzen sich Einkommens- und Substitutionseffekt nach Slutzky zusammen?

Aufgabe 23

Gegeben seien zwei Güter x und z. Der Preis des Gutes x steigt. Folgende Fälle der Gesamtnachfragereaktion sollen untersucht werden.

(a) x sinkt, z sinkt.

(b) x sinkt, z steigt.

(c) x steigt, z sinkt.

In welchen Fällen sind x und y jeweils superior oder inferior? Lässt sich darüber in jedem Fall eine eindeutige Aussage treffen? Was sind notwendige und hinreichende Bedingungen für den Giffen-Fall?

Aufgabe 24

Betrachten Sie eine einmalige Preiserhöhung für Gut 1! Welche der folgenden Fälle sind als Folge dieser Preiserhöhung möglich?

	Substitutionseffekt		Einkommenseffekt	
(a)	$x_1 \downarrow$	$x_2 \downarrow$	$x_1 \downarrow$	$x_2 \downarrow$
(b)	$x_1 \downarrow$	$x_2 \uparrow$	$x_1 \downarrow$	$x_2 \uparrow$
(c)	$x_1 \uparrow$	$x_2 \downarrow$	$x_1 \uparrow$	$x_2 \downarrow$
(d)	$x_1 \downarrow$	$x_2 \uparrow$	$x_1 \uparrow$	$x_2 \downarrow$

In welchen der Fälle ist Gut 1 möglicherweise ein Giffen-Gut?

Aufgabe 25, Klausur SS 04

Ein Haushalt maximiert seinen Nutzen durch den Konsum der Güter x_1 und x_2, die er zu den Preisen p_1 und p_2 erwerben kann. Der Preis p_1 des ersten Gutes sinkt.

	Wahr	Falsch
a) Aufgrund des Substitutionseffektes steigt die Nachfrage nach Gut 2.	☐	☐
b) Wenn sich die Nachfrage nach Gut 1 auf dem Niveau $x_1^* > 0$ infolge der Preissenkung nicht geändert hat, ist Gut 1 ein inferiores Gut.	☐	☐
c) Wenn x_2 ein inferiores Gut ist, erhöht sich die Nachfrage nach diesem Gut.	☐	☐
d) Wenn es für den Haushalt vorher optimal war, sein gesamtes Budget für x_1 zu verwenden, kann es nach der Preissenkung von Gut 1 optimal sein, auch Gut 2 zu konsumieren.	☐	☐

Aufgabe 26

Bei einer Änderung des Preises für das Gut "Freizeit" tritt wie bei Konsumgütern sowohl ein Einkommens- als auch ein Substitutionseffekt ein. Was ist dabei beim Einkommenseffekt zu beachten?

Aufgabe 27

Skizzieren Sie die Isoquanten folgender Produktionsfunktionen:

$$y = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$
$$y = \sqrt{x_1 + x_2}$$
$$y = \min\left(\frac{x_1}{5}, \frac{x_2}{10}\right)$$

Aufgabe 28

Was versteht man unter zunehmenden, konstanten bzw. abnehmenden Skalenerträgen? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Skalenerträgen und den Isoquantenabständen (je Outputeinheit)?
Prüfen Sie folgende Produktionsfunktionen hinsichtlich der Skalenerträge:

$$y = 2 \cdot {x_1}^{0.75} + 4 \cdot {x_2}^{0.25}$$
$$y = \left(\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

Aufgabe 29

Grenzen Sie abnehmende Grenzerträge und abnehmende Skalenerträge voneinander ab. Ist es möglich, dass eine Produktionfunktion abnehmenden Grenzerträgen eines Faktors bei zunehmenden Skalenerträgen aufweist?

Aufgabe 30

Erläutern Sie verbal und geometrisch, was darunter zu verstehen ist, wenn eine Produktionsfunktion eine abnehmende Technische Rate der Substitution aufweist.

Aufgabe 31

Gegeben ist folgende Produktionsfunktion:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{3}}$$

Angenommen, der Einsatz des Faktors x_2 sei kurzfristig fest vorgegeben: $x_2 = \overline{x_2}$. Die Faktorkosten betragen $\omega_1 = \omega_2 = 1$.

(a) Welche Menge des Faktors x_1 wird das Unternehmen einsetzen, um seinen Gewinn zu maximieren, wenn der Preis des produzierten Gutes y mit $p = 12$ gegeben ist? Wie hoch ist die Produktionsmenge y? Wie groß ist der Gewinn? (Alle Größen sind abhängig von $\overline{x_2}$!)

(b) Leiten Sie den Zusammenhang zwischen eingesetzter Menge x_1 und dem Faktorpreis ω_1 her und stellen sie ihn grafisch dar.

(c) Stellen Sie dann den Gewinn ebenfalls abhängig vom Faktorpreis ω_1 dar. Ab welchem Faktorpreis ω_1 lässt sich bei gegebener Einsatzmenge $\overline{x_2}$ des zweiten Faktors auch im Optimum kein Gewinn mehr erzielen? Warum ist das so?

Aufgabe 32

Nun sei beim Unternehmen aus Aufgabe 31 auch der Einsatz des Faktors x_2 flexibel, der Preis des Gutes beträgt weiterhin $p = 12$, die Faktorpreise ω_1 und ω_2 sind nicht mehr fest vorgegeben.

(a) Leiten Sie die Nachfragefunktionen $x_1^*(p = 12, \omega_1, \omega_2)$ bzw. $x_2^*(p = 12, \omega_1, \omega_2)$ her.

(b) Ermitteln Sie dann die Angebotsfunktion $y(p = 12, \omega_1, \omega_2$ sowie die Gewinnfunktion $\Pi(p = 12, \omega_1, \omega_2)$.

(c) Welche Auswirkungen auf

- Nachfrage nach den Faktoren x_1 bzw. x_2
- Angebotsmenge
- Gewinn

sind zu erwarten, wenn sich der Preis ω_2 des zweiten Faktors erhöht? Erläutern Sie dies sowohl algebraisch wie auch verbal. Ist bei einer der genannten Größen auch eine andere Reaktion denkbar?

Aufgabe 33

Ein Unternehmen produziert gemäß einer substitutionalen Produktionsfunktion

$$y = f(x_1, x_2).$$

Das Unternehmen setzt die Faktormengen $x_1 = 200$ und $x_2 = 100$ ein. Die Preise betragen $\omega_2 = 2$ und $\omega_2 = 1$.
Ist der realisierte Produktionsplan optimal, wenn die Isoquante durch den Punkt (200, 100) durch die Gleichung

$$x_1 = \frac{20000}{x_2}$$

beschrieben wird? Zeichnen Sie zur Beantwortung die Isoquante und die Isokostengerade durch den Punkt (200, 100).

Aufgabe 34

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der notwendigen Bedingung für ein Kostenminimum die Minimalkostenkombination für ein Unternehmen mit der Produktionsfunktion

$$y = f(x_1, x_2) = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2$$

welches bei den Faktorpreisen $\omega_1 = 2$ und $\omega_2 = 1$ die Menge $y = 1440$ produzieren will.

(b) Wie hoch sind die Produktionskosten?

(c) Berechnen und skizzieren Sie den Expansionspfad.

Aufgabe 35

Ein Unternehmen produziert gemäß der Produktionsfunktion

$$y = f(x_1, x_2) = (x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{2}}$$

Die Faktorpreise betragen $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = 4$.
Berechnen Sie die Kostenfunktion und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 36

Ein Unternehmen produziert gemäß der Produktionsfunktion

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}}$$

und den Faktorpreisen $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = 16$.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Lagrange-Funktion die Minimalkostenkombination und die anfallenden Kosten bei der Produktion der Menge $y = 8$. Erläutern Sie nach der Herleitung der Lösung den Wert und die Bedeutung des Lagrangefaktors λ.

(b) Errechnen Sie nun in Abhängigkeit von variablen Faktorpreisen ω_1 bzw. ω_2 und der Outputmenge y die bedingten Faktornachfragefunktionen $x_1^*(\omega_1, \omega_2, y)$ bzw. $x_2^*(\omega_1, \omega_2, y)$ sowie die Kostenfunktion $c(\omega_1, \omega_2, y)$.

(c) Laut Shephards Lemma muss gelten

$$\frac{\partial c(\omega_1, \omega_2, y)}{\partial \omega_1} = x_1^*(\omega_1, \omega_2, y)$$

Überprüfen Sie hierauf das in (b) errechnete Ergebnis und interpretieren Sie es.

Aufgabe 37

Beschreiben Sie den Expansionspfad einer limitationalen Produktionsfunktion. Wie hängt der Expansionspfad einer limitationalen Produktionsfunktion von den Faktorpreisen ab?

Aufgabe 38

Die Durchschnittskostenkurve $AC = \frac{c(\omega_1,\omega_2,y)}{y}$ wird in ihrem Minimum von der Grenzkostenkurve $MC = \frac{\partial c(\omega_1,\omega_2,y)}{\partial y}$ geschnitten. Erläutern Sie diesen Sachverhalt verbal und beweisen Sie ihn algebraisch. (Hinweis: Setzen Sie zur Bestimmung des Minimums der AC deren Ableitung gleich Null und verwenden die daraus resultierende Gleichung für den Beweis.)

Aufgabe 39

Die Produktionsfunktion eines Unternehmens sei gegeben durch

$$y = f(x_1, x_2) = (x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{4}}$$

Die Faktorpreise betragen $\omega_1 = 12$ und $\omega_2 = 3$. Es entstehen dem Unternehmen produktionsunabhängige Fixkosten in Höhe von $F = 4800$.

(a) Errechnen Sie die Minimalkostenkombination x_1^* bzw. x_2^* sowie die Kostenfunktion c zur Herstellung der Menge y unter den angegebenen Faktorpreisen. Welche Einsatzmengen sind optimal, um den Output in Höhe von $y = 40$ herzustellen? Welche Kosten entstehen dabei?

(b) Errechnen und skizzieren sie die Durchschnitts- und die Grenzkostenkurve. Wo erreicht die Durchschnittskostenkurve ihr Minimum?

(c) Die Produktion soll verringert werden auf $y = 20$, wobei allerdings der Einsatz des Faktors x_2 kurzfristig nicht verändert werden kann. Errechnen Sie zunächst die kurzfristige Kostenfunktion und die kurzfristige durchschnittliche Kostenfunktion. Welche Kosten entstehen nunc? Wo liegt jetzt das Minimum der Durchschnittskosten?