Einführung in die Geophysik

2. Geophysikalische Messtechniken und der Aufbau des Erdkörpers *korrigiert 20.4.2011*

Unterschied zwischen *Geophysik, Astrophysik* und Experimentalphysik im Labor: Der *Geophysiker, Astrophysiker* kontrolliert häufig das Experiment nicht selbst, sondern nimmt an einem Experiment teil (als Beobachter), das die Natur macht. Wichtigstes Beispiel hier: Die Messung der *Präzessionsperiode.*

2.1. Gravimetrie und das Schwerefeld der Erde

Wir beginnen mit dem Schwerefeld einer Kugel und gehen von dort zum Rotationsellipsoid. Die Rotation der Erde erzeugt ihren Äquatorwulst, und die Form der Erde (in 2. Näherung eben ein Rotationsellipsoid) entsteht durch die Balance zwischen Selbstanziehung (die allein eine perfekte Kugel erzeugen würde) und den Zentrifugalkräften. Die Abplattung (der relative Unterschied zwischen dem Äquator- und dem Polradius) beträgt ca 1/300. Dies ist auch die Größenordnung der dynamischen Abplattung, also des relativen Unterschiedes zwischen den Trägheitsmomenten bezüglich der Rotationsachse und bezüglich einer Achse in der Äquatorebene. Diese dynamische Abplattung spielt eine bedeutende Rolle bei der Suche nach der Massenverteilung im Erdinneren; allerdings wird dafür zusätzlich noch das Quadrupolmoment des Gravitationspotentials gebraucht – dafür ist eine erste Begegnung mit Kugelfunktionen notwendig. Die Messung beider Größen sind Anwendungen der Kreiselpräzession.

Zwei Körper mit den Massen m_1, m_2 im Abstand r voneinander ziehen sich mit der Kraft

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

an, oder: die von der Masse m_1 auf m_2 ausgeübte Schwerebeschleunigung ist

$$\vec{a} = G\frac{m_1}{r^3}\vec{r}$$

$G = 6.67 * 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2}$ ist die Gravitationskonstante.

Das *Gravitationspotential* der Masse m_1 definieren wir als

$$V = -G\frac{m_1}{r}$$

so dass die Gravitationsbeschleunigung in Richtung auf die Masse m_1

$$\vec{a} = G\frac{m_1}{r^2}\frac{r}{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{r}{r}$$

ist. Allgemeiner (in drei Dimensionen) ist diese Beschleunigung der *Gradient* des Gravitationspotentials

$$a = -\nabla V$$

und das Potential einer Massenverteilung ist

$$V = -G\sum_i \frac{m_i}{r_i} \qquad \text{oder} \qquad V = -G\int_M \frac{dm}{r}$$

Man kann zeigen (Rechnung in Kertz und Fowler), dass das Potential einer homogenen (d.h. mit konstanter Dichte) Kugel der Masse M im Außenraum dieser Kugel ebenfalls

$$V = -G\frac{M}{r}$$

ist. Die Erde ist in einer etwas besseren Näherung aber keine Kugel, sondern ein Rotationsellipsoid. Um dessen Gravitationspotential V zu finden benutzen wir, dass V außerhalb der Erde sowie an der Erdoberfläche die Laplacegleichung

$$\nabla^2 V = 0$$

erfüllt. Die allgemeine Lösung in Kugelkoordinaten (Radius *r* radial nach außen, Kobreite ϑ vom Pol zum Äquator gemessen, Länge λ) wird im Kapitel ‚Kugelfunktionen' diskutiert und wird uns bei der Beschreibung der Form des Erdmagnetfeldes begegnen. Hier begnügen wir uns mit einer vereinfachten Lösung, die aber wie die vollständige im Kapitel ‚Kugelfunktionen' von einem Separationsansatz

$$V(r,\vartheta,\lambda) = V_r(r)V_\vartheta(\vartheta)V_\lambda(\lambda).$$

für das Potential ausgeht, d.h. V_r hängt nur noch von der Koordinate *r* usw. Für Beobachtungspunkte außerhalb der Massenverteilung ergibt sich

$$V_r = B_n\, r^{-(n+1)}$$

für ein beliebiges *n* bzw. eine Superposition für Teillösungen für verschiedene *n.* Für ein Rotationsellipsoid hängt das Potential nicht von λ ab,

$$V_\lambda = 1$$

Die ϑ – Abhängigkeit, die im allgemeinen Fall durch die zugeordneten Kugelfunktionen $P_n^m(\cos\vartheta)$ beschrieben wird, reduziert sich für das Rotationsellipsoid auf die zonalen Kugelfunktionen, also

$$V_\vartheta = C_n\, P_n(\cos\vartheta),$$

wieder für beliebige *n* (wie wir bei der Lösung der Laplacegleichung in Kugelkoordinaten sehen werden, muss dieses *n* in jeder Teillösung aber das gleiche sein wie beim radiusabhängigen Anteil). Insgesamt ergibt sich das Potential des Rotationsellipsoids zu

$$V=-\frac{GM}{r}\left[J_oP_o-J_1\frac{r_E}{r}P_1(\cos\vartheta)-J_2\left(\frac{r_E}{r}\right)^2P_2(\cos\vartheta).....\right],$$

dabei wird die Dichteverteilung durch die Koeffizienten J_n beschrieben. Weil $P_o=1$ muss $J_0=1$ sein; der 1. Term ist also gerade das Potential der Kugel oder eines ‚Gravitationsmonopols'. Der 2. Term mit $P_1(\cos\vartheta)=\cos\vartheta$ wäre ein parallel zur Rotationsachse ausgerichteter Dipol (Ableiten nach den Koordinaten ergibt die Komponenten $a_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{const\cos\vartheta}{r^3}$ und $a_\vartheta=-\frac{\partial V}{r\partial\vartheta}=\frac{const\sin\vartheta}{r^3}$ einer hypothetischen Schwerebeschleunigung, die die Form eines Dipolfeldes hat). Mit positiven Massen lässt sich ein solcher Dipol nur realisieren, wenn die Nordhalbkugel schwerer oder leichter ist als die Südhalbkugel… d.h. $J_1=0$. Der 3. Term mit $P_2(\cos\vartheta)=\frac{3}{2}\cos^2\vartheta-\frac{1}{2}$ ist im Gegensatz zum 2. wieder symmetrisch bezüglich der Äquatorebene: dieser *Quadrupolterm* beschreibt den allergrößten Teil der Schwerewirkung des Äquatorwulstes. Für das Gravitationspotential des Erdellipsoids ergibt sich

$$V=-\frac{GM}{r}+\frac{GMr_E^2J_2}{r^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta-\frac{1}{2}\right)$$

Die Größe des Quadrupolmomentes J_2 lässt sich auch durch die Differenz zwischen den Hauptträgheitsmomenten *C* (bezüglich der tatsächlichen Rotationsachse) und *A* (in der Äquatorebene: eigentlich *A,B* aber *A=B)* darstellen: MacCullaghs Theorem verknüpft das Potential einer beliebigen Massenverteilung in einem Punkt *P* mit den drei Hauptträgheitsmomenten *A,B,C* und dem Trägheitsmoment *I* bezüglich der Verbindungslinie zwischen *P* und dem Schwerpunkt der Massenverteilung:

$$V=-\frac{GM}{r}-\frac{G}{2r^3}(A+B+C-3I)$$

Für das Rotationsellipsoid mit *A=B* ergibt sich (Rechnung in Stacey)

$$V=-\frac{GM_E}{r}+\frac{G(C-A)}{r^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta-\frac{1}{2}\right),$$

dies ist mit der durch Kugelfunktionsentwicklung gefundenen Form vereinbar, wenn

$$J_2=\frac{C-A}{M_Er_E^2}$$

Die Messung dieses Quadrupolmoments mit Bahnstörungen von Satelliten nützt die Präzession aus. Dabei ist der Satellit der Kreisel, der Äquatorwulst erzeugt ein auf diesen Kreisel wirkendes Drehmoment.

Wiederholung: Als Präzession bezeichnet man die Bewegung eines Kreisels, auf den (ständig) ein Drehmoment senkrecht zur Figurenachse wirkt. Analog zur Kreisbewegung, bei der die ins Zentrum gerichtete Kraft

$$\vec{F} = \frac{dp}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{p}$$

nur die Richtung, aber nicht den Betrag des Impulses p ändert, haben wir jetzt ein Drehmoment, das nur die Richtung von L , nicht aber den Betrag (und die Drehfrequenz des Kreisels) ändert:

$$\vec{T} = \frac{dL}{dt} = \vec{\omega}_{präzession} \times \vec{L}$$

z.B: horizontal aufgehängter Kreisel mit ausbalancierter Gewichtskraft: Ursprünglicher Drehimpuls und horizontale Figurenachse in x-Richtung, Gewichtskraft in z-Richtung und Hebelarm in x-Richtung führt auf Drehmoment in y-Richtung, Präzession um die z–Achse.

Satellit der Masse m auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_s, diese Bahn möge mit der Äquatorebene den Winkel β bilden. Gravitationspotential im Abstand $r = r_s$ für $\vartheta = \pi/2 - \beta$. Das Drehmoment, das auf den Satelliten wirkt, ist

$$T = \frac{m}{2}\frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{3Gm}{2r_s^3}(C-A)\cos\beta\sin\beta = \frac{3Gm}{2r_s^3} M_E r_E^2 J_2 \cos\beta\sin\beta$$

(Faktor 2 im Nenner nur mit komplizierter trigonometrischer Betrachtung, die das mittlere Drehmoment während eines gesamten Bahnumlaufs berücksichtigt). Nur der den Äquatorwulst beschreibende 2. Term im Gravitationspotential hängt von ϑ bzw. von β ab!

Dieses Drehmoment wirkt auf Komponente des Bahndrehimpulses senkrecht zur Erdachse

$$L_\perp = m r_s^2 \omega_s \sin\beta ,$$

ω_s ist die Kreisfrequenz des Bahnumlaufs. Die Präzessionsfrequenz des Satellitenkreisels ist

$$\omega_p = \frac{T}{L_\perp} = -\frac{3GM_E r_E^2 J_2}{2r_s^5\ \omega_s}\cos\beta = -\frac{3}{2}\omega_s \frac{r_E^2}{r_s^2} J_2 \cos\beta$$

Im letzten Schritt wurde das 3. Keplersche Gesetz, $\omega_s^2 r_s^3 = GM_E$, ausgenützt. Wenn Bahnkreisfrequenz und Präzessionskreisfrequenz bekannt sind, kann J_2 bestimmt werden. Ergebnis:

$$J_2 = 0.00108$$

Die quantitative Bestimmung des Quadrupolmoments ist der erste von zwei Schritten zu der Aussage ‚Die Erde hat einen schweren Kern'. Der zweite Schritt macht wieder Gebrauch von der Präzession, aber diesmal ist die Erde der der Kreisel: Weil die Rotationsachse der Erde nicht senkrecht auf der Ekliptik (der Bahnebene des Erdumlaufs um die Sonne) steht, sondern um einen Winkel $\phi = 23.5°$ verdreht, übt die Erde ein Drehmoment auf die Sonne, und deshalb die Sonne auf die Erde aus. Wie beim Satellitenumlauf ergibt sich als mittleres Drehmoment

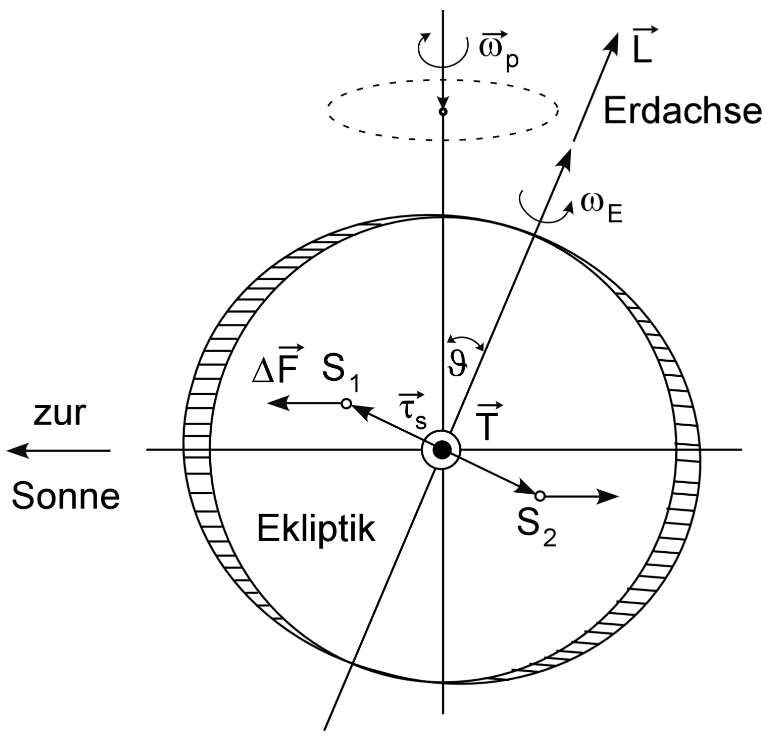
$$T = \frac{m_s}{2}\frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{3Gm_s}{2R^3}(C-A)\cos\phi\sin\phi$$

(R ist der Radius der Erdbahn um die Sonne, m_s ist die Masse der Sonne) Es wirkt auf den Drehimpuls $\omega_E C$ der Erdrotation (C ist wieder das Hauptträgheitsmoment, also dasjenige bezüglich der Rotationsachse), sodass sich die Präzessionsfrequenz

$$\Omega_p = \frac{T}{\omega_E C} = \frac{3}{2}\frac{Gm_s(C-A)}{R^3\,\omega_E C}\cos\phi\sin\phi = \frac{3}{2}\frac{\omega_B^2}{\omega_E}\frac{C-A}{C}\cos\phi\sin\phi$$

ergibt. Im letzten Schritt wurde wieder das 3. Keplersche Gesetz $\omega_B^2 R^3 = Gm_s$ für den Bahnumlauf der Erde mit der Kreisfrequenz ω_B ausgenutzt. Aus dieser Präzessionsfrequenz lässt sich also die *dynamische Abplattung* $\frac{C-A}{C}$ bestimmen:

$$\frac{C-A}{C} = \frac{1}{305.5}$$



Ausdem Quadrupolmoment und der dynamischen Abplattung ergibt sich schliesslich das Hauptträgheitsmoment

$$\frac{C}{M_E r_E^2} = \frac{J_2}{\frac{C-A}{C}} = 0.331$$

Für eine homogene Kugel hätte sich 0.4 ergeben, also muss der Kern eine höhere Dichte als der Mantel haben.

Unterschied zwischen dem Potential des Erdellipsoids und dem Geopotential, aus dem ein mit den Messungen vergleichbares Schwerefeld berechnet wird: Das Geopotential beschreibt die gemeinsame Wirkung von Gravitations- und Zentrifugalkraft.

Die Zentrifugalbeschleunigung ist senkrecht von der Rotationsachse weg gerichtet und hat den Betrag

$$b_z = \omega_E^2 r \sin\vartheta$$

sie nimmt linear mit $r\sin\vartheta$ zu und hat das Potential

$$V_z = -\frac{1}{2}\omega_E^2 r^2 \sin^2\vartheta$$

Das Geopotential ist

$$U = V + V_z = -\frac{GM_E}{r} + \frac{G(C-A)}{r^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right) - \omega_E^2 r_E^2 \sin^2\vartheta$$

Die Variation der Schwerebeschleunigung mit der Breite β ist näherungsweise

$$g(\beta) = 9.7805(1 + 0.005288\sin^2\beta)\, m/s^2 ,$$

und muss bei gravimetrischen Messungen berücksichtigt werden (neben dieser Breiten-Korrektur gibt es noch eine Höhenkorrektur, die den veränderten Abstand des Gravimeters vom Erdmittelpunkt berücksichtigt, und eine ‚Bougerkorrektur', welche die Schwerewirkung der Gesteinsschichten zwischen Gravimeter und dem Erdellipsoid berücksichtigt).
die Differenz zwischen der Schwerebeschleunigung am Pol und am Äquator (ca. $0.052\, m/s^2$) ist zu ca 2/3 auf die am Pol fehlende Zentrifugalbeschleunigung zurückzuführen.

Als *Geoid* wird eine Fläche konstanten Potentials U_0 bezeichnet (anschaulich wäre dies genau die Meeresoberfläche, wenn es nicht noch -> Geoidanomalien gäbe, die das Potential weiter verkomplizieren). Der Äquatorradius ($\vartheta = 90°$) sei *a* und der polare Radius ($\vartheta = 0°$) sei *c,* dann ergibt sich für diese beiden Radii

$$U_a = -\frac{GM_E}{a} + \frac{G(C-A)}{2a^3} - \omega_E^2 a^2$$

$$U_c = -\frac{GM_E}{c} + \frac{G(C-A)}{c^3}$$

Daraus lässt sich die geometrische Abplattung bestimmen

$$f = \frac{a-c}{a} = \frac{C-A}{M_E a^2}\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{c}{2a}\right) + \frac{a^2 c \omega_E^2}{2GM_E}$$

Wenn wir auf der rechten Seite den kleinen Unterschied zwischen *a* und *c* vernachlässigen, ergibt sich

$$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} \frac{g_z}{g},$$

mit $\frac{g_z}{g}$ ist das Verhältnis der Zentrifugal- zur Gravitationsbeschleunigung am Äquator gemeint.

Für eine ganz genaue Beschreibung des Potentials des Geoids brauchen wir die allgemeine Lösung der Laplacegleichung

$$V = V_r V_\lambda V_\vartheta = \frac{GM}{r}(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_E}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} \left[C_n^m \cos m\lambda + S_n^m \sin m\lambda\right] P_n^m(\cos\vartheta))$$

für das Potential einer Massenverteilung außerhalb derselben. Die Koeffizienten C_n^m, S_n^m dieser Kugelfunktionsentwicklung werden wieder aus Bahnschwankungen von künstlichen Satelliten bestimmt. Die Terme C_3^0, C_3^1, S_3^1 usw., welche die ‚Birnengestalt' der Erde beschreiben, sind 200- 1000mal kleiner als das Quadrupolmoment C_2^0. Die höheren Terme beschreiben noch kleinräumigere Abweichungen von der Form des Rotationsellipsoides. Sehen wir in ihnen die Kontinente bzw. die Verteilung von Wasser und Land auf der Erdoberfläche?

Die hypsographische Kurve, die die Höhenverteilung auf der Erdoberfläche beschreibt, hat zwei distinkte Maxima: bei -4500m (der normale Ozeanboden) und bei 500 m (normale Kontinente). Der Dichteunterschied zwischen Seewasser und den Gesteinen der kontinentalen Kruste beträgt 1750 kg/m^3, sodass die kontinentale Kruste einen Massenüberschuss von $9 \cdot 10^6 kg$ pro m^2 haben müsste, der aber nicht beobachtet wird. Erklärung: Ozeanische Kruste ist ca 5km mächtig, kontinentale Kruste dagegen 35-40km, und beide liegen au einem dichteren Mantel. Der og. Massenüberschuss wird also durch Volumina mit geringerer Dichte kompensiert. Die Herkunft der beiden verschieden Krustentypen werden in Kap 3.4 und 5.3 besprochen!

Als *Isostasie* wird ein ähnlicher Kompensationseffekt bei Gebirgen bezeichnet: Diese haben gegenüber der normalen kontinentalen Kruste eine zusätzliche Masse, von der man wieder erwarten sollte, dass sie im Geoid sichtbar wird. Alternativ kann man ein Lotabweichung (Abweichung der Gravitationsbeschleunigung von der Senkrechten) erwarten – beides wird nicht beobachtet. Erklärung: Die Gebirge haben ‚Gebirgswurzeln' – die kontinentale Kruste ist dort sehr viel mächtiger als 35- 40km.

Bemerkung zu den auf dem Mantel schwimmenden Kontinenten