

### Test I: Elementare Algebra, Lösungen:

[ 1 ] Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 3; (d) 3 (Kap. 1.2)

Berechnen und vereinfachen Sie so weit wie möglich

$$(a) \frac{7^3 \cdot 7^2}{7^4} = \boxed{\frac{7^{3+2}}{7^4} = \frac{7^5}{7^4} = 7^1 = 7}$$

$$(b) (5.5 - 3.5)^3 = \boxed{2^3 = 8}$$

$$(c) \left(\frac{-2}{5}\right) \left(\frac{-2}{5}\right) \left(\frac{-2}{5}\right) = \boxed{\frac{-8}{125} \quad (= -0.064)}$$

$$(d) \frac{2^{19} - 2^{17}}{2^{19} + 2^{17}} = \boxed{\frac{2^{17}(2^2 - 1)}{2^{17}(2^2 + 1)} = \frac{3}{5}}$$

[ 2 ] Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 2; (d) 4 (Kap. 1.2 - 1.4)

$$(a) \text{ Wenn } 2x^2y = 5, \text{ dann ist } 4x^4y^2 = \boxed{(2x^2y)^2 = 25}$$

$$(b) 11\% \text{ von } 3\,500 \text{ ist gleich } \boxed{3\,500 \cdot 11/100 = 3\,500 \cdot 0.11 = 385}$$

$$(c) \sqrt{13^2 - 12^2} = \boxed{\sqrt{(13+12)(13-12)} = \sqrt{25} = 5}$$

(d) Formen Sie den folgenden Bruch so um, dass im Nenner kein Wurzelzeichen mehr steht:

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \boxed{\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{3 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2}{3 - 2} = 5 + 2\sqrt{6}}$$

[ 3 ] Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 2 (Kap. 1.3)

Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

(a)  $(x + 2y)^2 =$

$$x^2 + 4xy + 4y^2$$

(b)  $(2x - 3y)^2 =$

$$4x^2 - 12xy + 9y^2$$

(c)  $(a + b)(a - b) =$

$$a^2 - b^2$$

[ 4 ] Punkte: (a) 2; (b) 3; (c) 3; (d) 4 (Kap. 1.3)

Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

(a)  $5a - (3a + 2b) - 2(a - 3b) =$

$$5a - 3a - 2b - 2a + 6b = 4b$$

(b)  $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 - 2(x + 2)(x - 2) =$

$$[(x + 2) - (x - 2)]^2 = 4^2 = 16$$

(c)  $(1 - x)^2(1 + x)^2 =$

$$[(1 - x)(1 + x)]^2 = (1 - x^2)^2 = 1 - 2x^2 + x^4$$

(d)  $(2 - a)^3 =$

$$(2 - a)^2(2 - a) = (4 - 4a + a^2)(2 - a) = 8 - 4a - 8a + 4a^2 + 2a^2 - a^3 = -a^3 + 6a^2 - 12a + 8$$

[ 5 ] Punkte: 4 (Kap. 1.2)

Das Bruttonsozialprodukt (BSP) sei in einem gewissen Land im Jahre 2000 gleich 8 Milliarden Euro. Wie lässt sich das BSP nach 6 Jahren berechnen, wenn es jedes Jahr um 5% zunimmt?

BSP nach 6 Jahren:

$$8(1.05)^6 \text{ Milliarden Euro}$$

[ 6 ] Punkte: (a) 3; (b) 3; (c) 4 (Kap. 1.3)

Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke in Faktoren:

(a)  $5a^2b + 15ab^2 =$

$$5ab(a + 3b)$$

(b)  $9 - z^2 =$

$$(3 - z)(3 + z)$$

(c)  $p^3q - 4p^2q^2 + 4pq^3 =$

$$pq(p^2 - 4pq + 4q^2) = pq(p - 2q)^2$$

[ 7 ] Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 2 (Kap. 1.4)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke zu einem einzigen Bruch:

(a)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$

$$\frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

(b)  $\frac{6a}{5} - \frac{a}{10} + \frac{3a}{20} =$

$$\frac{4 \cdot 6a}{20} - \frac{2a}{20} + \frac{3a}{20} = \frac{24a - 2a + 3a}{20} = \frac{25a}{20} = \frac{5a}{4}$$

(c)  $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} =$

$$\frac{\frac{6}{12} - \frac{4}{12}}{\frac{12}{12} - \frac{2}{12}} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{10}{12}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

[ 8 ] Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 2; (d) 2 (Kap. 1.4)

Berechnen und vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a)  $25^{1/2} =$

$$5$$

(b)  $(x^{1/2}y^{-1/4})^4 =$

$$x^2y^{-1}$$

(c)  $\sqrt[3]{27a^6} =$

$$\sqrt[3]{27} \sqrt[3]{a^6} = 3a^2$$

(d)  $p^{1/5} (p^{4/5} - p^{-1/5}) =$

$$p^{1/5}p^{4/5} - p^{1/5}p^{-1/5} = p^{1/5+4/5} - p^{1/5-1/5} = p - 1$$

[ 9 ] Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 2 (Kap. 2.1)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der Unbekannten  $x$  auf:

(a)  $\frac{3}{5}x = -6$

$x =$  -10

Lösung:  $\frac{3}{5}x = -6 \Leftrightarrow 3x = -30 \Leftrightarrow x = -10$

---

(b)  $\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2x+3}$

$x =$  6

Lösung:  $\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2x+3} \Leftrightarrow 2x+3 = 3(x-1) \Leftrightarrow 2x+3 = 3x-3 \Leftrightarrow x = 6$   
(Beachten Sie, dass kein Nenner 0 ist, wenn  $x = 6$  ist.)

---

(c)  $\sqrt{3-x} = 2$

$x =$  -1

Lösung:  $\sqrt{3-x} = 2 \Rightarrow 3-x = 4 \Rightarrow x = -1$ . Durch Einsetzen sieht man, dass dies tatsächlich eine Lösung ist.

---

[ 10 ] Punkte: (a) 2; (b) 3; (c) 3 (Kap. 1.6)

Für welche  $x$  gelten die folgenden Ungleichungen?

(a)  $-3x + 2 < 5$

$x > -1$

Lösung:  $-3x + 2 < 5 \Leftrightarrow -3x < 3 \Leftrightarrow -x < 1 \Leftrightarrow x > -1$  (Eine Ungleichung kehrt sich um, wenn sie mit einer negativen Zahl multipliziert wird!)

---

(b)  $\frac{x-1}{x+3} \leq 0$

$-3 < x \leq 1$

Lösung: Verwenden Sie ein Vorzeichendiagramm! Beachten Sie, dass der Bruch nicht definiert ist, wenn  $x = -3$  ist.

---

(c)  $x^3 < x$

$x < -1$  oder  $0 < x < 1$

Lösung:  $x^3 < x \Leftrightarrow x^3 - x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) < 0$ . Verwenden Sie dann ein Vorzeichendiagramm.

---

[ 11 ] Punkte: (a) 3; (b) 3; (c) 3 (Kap. 2.3)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(a)  $3x - 9x^2 = 0$

$x =$  0 oder 1/3

Lösung:  $3x - 9x^2 = 0 \iff 3x(1 - 3x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = 1/3$

(b)  $x^2 - 2x - 15 = 0$

$x =$  -3 oder 5

(c)  $2P^2 = 2 - 3P$

$P =$  -2 oder 1/2

---

[ 12 ] Punkte: (a) 3; (b) 4; (c) 4 (Kap. 2.4)

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

(a) 
$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

$x = 3$                        $y = 1$

(b) 
$$\begin{aligned} 1.5p - 0.5q &= 14 \\ 2.5p + 1.5q &= 28 \end{aligned}$$

$p = 10$                        $q = 2$

(c) 
$$\begin{aligned} \frac{3}{p} + \frac{3}{q} &= 3 \\ \frac{3}{p} - \frac{1}{q} &= 7 \end{aligned}$$

$p = 1/2$                        $q = -1$

Lösung: Setzen Sie  $x = 1/p$  und  $y = 1/q$ . Dann ist  $3x + 3y = 3$  und  $3x - y = 7$  mit der Lösung  $x = 2$  und  $y = -1$ . Damit ist dann  $p = 1/2$  und  $q = -1$ .

---