Test II: Elementare Mathematik

[1] **Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 2; (d) 3**

(a) $2^5 + 2^5 = 2^x \quad \Rightarrow \quad x =$ $\boxed{6}$ Lösung: $2^5 + 2^5 = 2 \cdot 2^5 = 2^6$, so dass $x = 6$

(b) $3^{-15} + 3^{-15} + 3^{-15} = 3^y \quad \Rightarrow \quad y =$ $\boxed{-14}$ Lösung: $3^{-15} + 3^{-15} + 3^{-15} = 3 \cdot 3^{-15} = 3^{-14}$, so dass $y = -14$

(c) $\sqrt{13^2 - 5^2} =$ $\boxed{12}$ Lösung: $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

(d) $\frac{2^{26} - 2^{23}}{2^{26} + 2^{23}} = \frac{z}{9} \quad \Rightarrow \quad z =$ $\boxed{7}$ Lösung: $\frac{2^{26} - 2^{23}}{2^{26} + 2^{23}} = \frac{2^{23}(2^3 - 1)}{2^{23}(2^3 + 1)} = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} = \frac{7}{9}$, so dass $z = 7$.

---

[2] **Punkte: (a) 1 + 1; (b) 2 + 2**

(a) Bestimmen Sie die Steigungen der folgenden Geraden:

(i) $y = -\frac{3}{2}x + 4$ $\boxed{-3/2}$

(ii) $6x - 3y = 5$ $\boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden

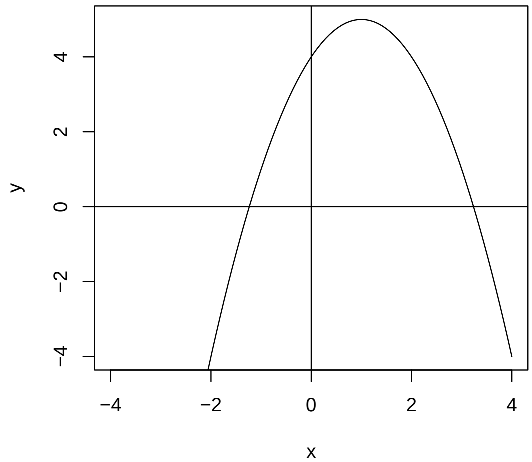
(i) durch den Punkt $(-2, 3)$ und mit der Steigung -2: $\boxed{y = -2x - 1}$

(ii) durch die Punkte $(a, 0)$ und $(0, b)$: $\boxed{y = (-b/a)x + b}$

---

[3] **Punkte: 5**
Vervollständigen Sie die folgende Tabelle und skizzieren Sie den Graphen der Funktion $y = -x^2 + 2x + 4$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = -x^2 + 2x + 4$	-4	1	4	5	4	1	-4



---

[4] **Punkte: (a) 4; (b) 4**
Bestimmen Sie die Maximum/Minimum-Punkte (**Geben Sie explizit an**, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt!) und den Wert des Maximums bzw. Minimums für

(a) $y = x^2 - 4x + 8$ $\boxed{\text{Minimum 4 für } x = 2}$

Lösung: Folgt aus $x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 2^2 + 8 - 2^2 = (x-2)^2 + 4$ oder mit Hilfe der Differentialrechnung.

(b) $y = -2x^2 + 16x - 14$ $\boxed{\text{Maximum 18 für } x = 4}$

Lösung: Folgt aus $-2x^2 + 16x - 14 = -2(x^2 - 8x + 7) = -2(x^2 - 8x + 4^2 + 7 - 4^2) = -2[(x-4)^2 - 9] = -2(x-4)^2 + 18$ oder mit Hilfe der Differentialrechnung.

---

[5] **Punkte: (a) 4; (b) 4**
Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

(a) $(2x^3 - 3x + 10) : (x + 2) =$ $\boxed{2x^2 - 4x + 5}$

(b) $(x^4 + x) : (x^2 - 1)$ Lösung: $= x^2 + 1 + \dfrac{x+1}{x^2-1} = \boxed{x^2 + 1 + \dfrac{1}{x-1}}$

---

[6] **Punkte: 5**

Sei $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$. Für welche Werte von x ist $f'(x) = 0$? $x =$ $\boxed{0 \text{ und } \pm 2}$

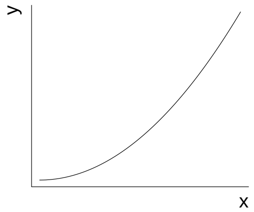
Lösung: $f'(x) = 4x^2 - x^4 = x^2(4 - x^2) = x^2(2-x)(2+x) = 0 \iff x = 0$ oder $x = \pm 2$

---

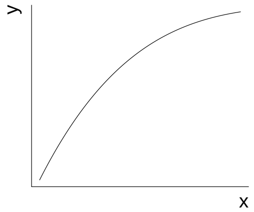
[7] **Punkte: (a) 3; (b) 3; (c) 3; (d) 3**

Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion in jedem der folgenden Fälle:

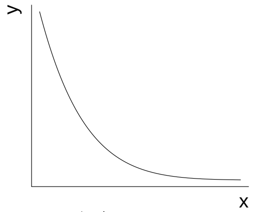
(a) $f'(x) > 0$ und $f''(x) > 0$:



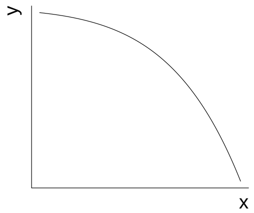
(b) $f'(x) > 0$ und $f''(x) < 0$:



(c) $f'(x) < 0$ und $f''(x) > 0$:



(d) $f'(x) < 0$ und $f''(x) < 0$:



---

[8] **Punkte: (a) 3; (b) 3**

(a) Die Kosten (in Euro) der Förderung von T Tonnen eines Mineralerzes seien gegeben durch $C = f(T)$. Geben Sie eine ökonomische Interpretation der Aussage: $f'(1000) = 50$.

> Die Grenzkosten sind 50 Euro, wenn der Output 1000 Tonnen ist. (Oder: Die zusätzlichen Kosten für die Förderung einer Tonne mehr als 1000 Tonnen sind 50 Euro.)

(b) Ein Verbraucher möchte ein gewisses Gut zum kleinstmöglichen Preis kaufen. Es bezeichne $P(t)$ den niedrigsten Preis, den der Verbraucher nach t Stunden Suche auf dem Markt gefunden hat. Welche Vorzeichen ($\leq 0; \geq 0; < 0; > 0$) vermuten Sie für $P'(t)$ und $P''(t)$?

Vorzeichen von $P'(t)$: $\boxed{\leq 0}$ Vorzeichen von $P''(t)$: $\boxed{> 0}$

Lösung: $P'(t) \leq 0$, da längere Suche niemals zu einem höheren besten Preis führt und i.Allg. zu einem niedrigeren besten Preis führt. $P''(t)$ ist vermutlich positiv, denn: Je länger Sie suchen, desto geringer wird der Gewinn im Preis sein, den Sie erzielen.

---

[9] **Punkte: (a) 2; (b) 2; (c) 2; (d) 2**

Schreiben Sie die allgemeinen Regeln für die Differentiation der folgenden Ausdrücke auf.

(a) $y = f(x) + g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \boxed{f'(x) + g'(x)}$

(b) $y = f(x)g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \boxed{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$

(c) $y = f(x)/g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \boxed{\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}$

(d) $y = f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = \boxed{f'(g(x))g'(x)}$

---

[10] **Punkte: jeweils 2**
Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

(a) $y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' =$ $\boxed{2x}$

(b) $y = x^5/5 \quad \Rightarrow \quad y' =$ $\boxed{x^4}$

(c) $y = \frac{x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad y' =$ $\boxed{\frac{1}{(x+1)^2}}$

(d) $y = (x^2+5)^6 \quad \Rightarrow \quad y' =$ $\boxed{6(x^2+5)^5 2x = 12x(x^2+5)^5}$

(e) $y = e^x \quad \Rightarrow \quad y' =$ $\boxed{e^x}$

(f) $y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' =$ $\boxed{1/x}$

(g) $y = 2^x \quad \Rightarrow \quad y' =$ $\boxed{2^x \ln 2}$

(h) $y = x^x \quad \Rightarrow \quad y' =$ $\boxed{x^x(\ln x + 1)}$

---

[11] **Punkte: jeweils 2**
Welche der folgenden Aussagen sind WAHR? Kreuzen Sie sie an.

a) Die Regel, die die in Grad Fahrenheit gemessene Temperatur in dieselbe in Grad Celsius gemessene Temperatur umwandelt, ist eine invertierbare Funktion. (×)

b) Eine konkave Funktion hat immer ein Maximum. (   )

c) Eine differenzierbare Funktion kann ein inneres Maximum nur in einem stationären Punkt der Funktion haben. (×)

d) Wenn $f'(a) = 0$ ist, dann ist a entweder ein lokaler Maximum- oder ein lokaler Minimumpunkt. (   )

e) Die Bedingungen $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$ sind notwendig und hinreichend dafür, dass a ein lokaler Maximumpunkt für f ist. (   )

Lösung: (b) Betrachten Sie $y = e^{-x}$. (d) a könnte ein Wendepunkt sein. (e) Die Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig. Zum Beispiel hat $f(x) = -x^4$ ein Maximum an der Stelle $x = 0$ und dennoch ist $f'(0) = f''(0) = 0$.

---

[12] **Punkte:**
Welche der folgenden Formeln sind KORREKT? Kreuzen Sie sie an.

a) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ (×)

b) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ (×)

c) $\int f(x)g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx$ ( )

d) $\int\limits_a^b x\,dx = b - a$ ( )

Lösung: (c) $\frac{d}{dx}(\int f(x)\,dx \int g(x)\,dx) = f(x)\int g(x)\,dx + g(x)\int f(x)\,dx \neq f(x)g(x)$, abgesehen von einigen sehr speziellen Funktionen f und g. (d) $\int\limits_a^b x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.